

LA LEYENDA DEL AJEDREZ

Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo reinaba en cierta parte de la India un rey llamado Sheram. En una de las batallas en las que participó su ejército perdió a su hijo, y eso le dejó profundamente consternado. Nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarle.

Un buen día un tal **Sissa** se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sissa le presentó un juego que, aseguró, conseguiría divertirle y alegrarle de nuevo: **el ajedrez**.

Después de explicarle las reglas y entregarle un tablero con sus piezas el rey comenzó a jugar y se sintió maravillado: jugó y jugó y su pena desapareció en gran parte. Sissa lo había conseguido.

Sheram, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sissa que como recompensa pidiera lo que deseara. Éste rechazó esa recompensa, pero el rey insistió y Sissa pidió lo siguiente:

Deseo que ponga un grano de trigo en el primer cuadro del tablero, dos, en el segundo, cuatro en el tercero, y así sucesivamente, doblando el número de granos en cada cuadro, y que me entregue la cantidad de granos de trigo resultante.

El rey se sorprendió bastante con la petición creyendo que era una recompensa demasiado pequeña para tan importante regalo y aceptó. Mandó a los calculistas más expertos de la corte que calcularan la cantidad exacta de granos de trigo que había pedido Sissa, es decir:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{62} + 2^{63}$$

Cuál fue su sorpresa cuando éstos le comunicaron que no podía entregar esa cantidad de trigo ya que ascendía a:

18.446.744.073.709.551.615 granos de trigo

El rey se quedó de piedra. Pero en ese momento Sissa renunció al presente. Tenía suficiente con haber conseguido que el rey volviera a estar feliz y además les había dado una lección matemática que no se esperaban.

Esta leyenda es bastante conocida. Seguro que much@s de vosotr@s sabíais de su existencia. Pero hay una variante que serviría para que la lección matemática se la llevara el *listillo* de Sissa:

Supongamos que el rey al pensar que la petición de Sissa era irrisoria le hubiese ofrecido granos de trigo en esa progresión pero **hasta el infinito**, es decir:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{62} + 2^{63} + 2^{64} + \dots$$

Veamos qué hubiera pasado:

Llamemos **S** a la cantidad de granos de trigo que recibiría Sissa, es decir:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{62} + 2^{63} + 2^{64} + \dots$$

Ahora operemos de la siguiente forma:

Es decir, sacamos factor común 2 de la parte de la suma que teníamos entre paréntesis. Pero como podemos observar lo que nos ha quedado entre paréntesis es exactamente igual a **S**. Esto es:

$$S = 1 + 2 \cdot S \rightarrow (\text{Despejando}) \rightarrow S = -1$$

Por tanto la generosidad *infinita* del rey se ve recompensada: no solamente no debe pagar nada a Sissa sino que éste le debe entregar un grano de trigo.

Ejercicios.

1. ¿Cuál es el fallo de este último razonamiento?

2. Usando Hoja de Excel, calcula la suma de:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{62} + 2^{63}$$

Calcula la diferencia entre 2^{64} y la suma anterior S. Explica el resultado obtenido

3. Comprueba que la suma anterior coincide con:

$$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Es decir

$$S = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1}$$

4. Suponiendo que 1Kg de trigo son 10.000 granos, calcula las Tm de trigo.

5. Estimando que la producción de trigo mundial del año 2013-2014 es de 708.891.000 Tm, calcula los años necesarios para abastecer a Sissa de trigo.